

科普數學書櫃

撰文\賴以威

每個人都學過數學，但許多人對數學的印象停留在考卷的模樣，認為數學無趣、不實用，而且好像是少數受到庇佑的人才能學好的科目。這些刻板印象都是不正確的，數學其實非常有趣，在生活中無所不在，舉個例子來說，方才提起的「刻板印象」就可以用機率中的貝氏定理來解釋：當我們聽到一句話時，不是單純的就字面上的意義理解，而會根據說話者的背景，曾經講過的話，對他的話給予更完整的評價。我們習慣於用直覺來評估，但想評估的非常準確，或是想要讓電腦、機器來評估，你就得運用數學。

從過去，數學就扮演了宛如地下水的角色，在許多科學、技術底下緩緩流動，扮演重要的角色，而如今電腦科學發達的時代，數學更是一躍來到了科技舞台的核心，人工智慧、深度學習、演算法，都需要用數學的語言建構。漸漸的，大家開始知道數學的重要性，好奇數學家腦袋裡究竟裝甚麼，相關的書籍、電影越來越

多。本篇文章，就是想藉由導讀幾本有趣的科普書籍，作為一個引子，讓想了解數學不同面向（特別是有趣、好玩、實用面向）的讀者，能按圖索驥，更深入的了解。

※《用數學的語言看世界》

「如果你無法將一個數學理論弄清楚到可以解釋給街上任何一個人聽，那麼這個數學理論就不算完成。」

這是1900年，德國大數學家希爾伯特（D. Hilbert）在巴黎的國際數學會議上所引用的一位法國老數學家的話。

作者大栗博司教授是加州理工學院的理論物理學研究所所長，這是一本站在知識頂端的學者，低首寫給女兒的一本數學童話書。書中有許多我們熟悉的幾個數學故事：無限個房間的旅館，某天來了無限多位客人；從辛普森殺人案件中討論機率；質數在加密解密上的應用……事實上，書中所用的都是相當經典的數學故

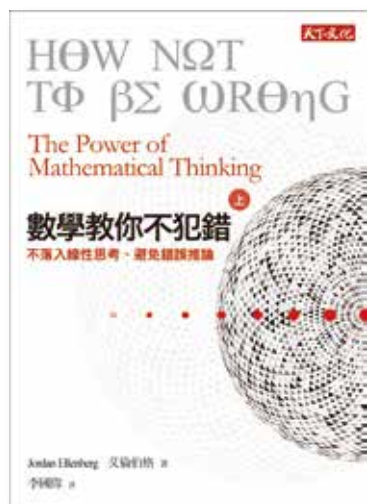


事。而經典之所以是經典在於它能讓人印象深刻。也因此我們看到羅密歐與茱麗葉的故事不斷被改編，金庸小說每隔幾年就被拿上螢幕重拍一次。透過不同的詮釋，經典會被賦予不同的感受，大栗博司教授就是一位能充分發揮數學經典魅力的作家！

事實上在讀這本書時，我一直想起伽利略說過的「自然界的書是用數學的語言寫成」。如果說學校課本是為文法書，這本書就好像是那種專門為旅行而設定的旅遊會話書，讓你能立刻知道學了，哪裡能派上用場。

※《數學教你不犯錯》

本書作者Jordan Ellenberg是一位出版過小說的數學天才，不論對



數學的理解或駕馭文字的能力都非常深厚。再由同樣文理雙棲的中研院李國偉老師執筆翻譯。這樣的作者與譯者組合，讓我在閱讀的過程中，只能不斷用折狗耳朵來代替鼓掌。

數學科普書有兩種極端類型：一個特定數學知識作主題，或是許多獨立短篇介紹不同的數學知識。這套書介於中間，上下兩冊看似用較長的篇幅介紹數個觀念，但其實觀念之間都有連結。如果我們把數學知識看作是圖論裡的一個點，知識的關聯性用線來連結，作者深厚的數學底蘊，讓他能看見一般人沒注意到的連結，以及每個知識對應的軼聞、歷史典故、生活實例，他能從樂透一路說到通信原理，間或還穿插著幾何知識。裡面有些部份很簡單，有些會讓你得放下書本反



覆思考好幾次才能確定自己真的理解他在說什麼，有時候還會出現幾道計算過程。但它跟考試不一樣，考試是為了檢驗你是否理解概念，這本書則是利用概念去了解、分析某些事件的道理。

數學是一種思考方式，是擴充常識的手段。

這是本書的主旨。

如同有時候我們需要紙筆把腦袋裡想的東西寫出來，才能加以整理。數學是心靈上的工具，幫助我們在思考時能更有條理，能從「有或沒有」的二分法進步到「有多少」的量化，能考慮到那些直覺無法輕易捕捉的真相。比方關於機率，作者在序言裡這麼介紹

「我們的內建心智系統可以估計

不確定事件發生的可能性，但是那些系統的能力相當弱、也不可靠，對於極為稀有的事件是無能為力。因此我們需要一些穩固的定理與技巧來強化我們的直覺，於是就創造了機率的數學理論。」

作者就是這樣，能用簡單的幾句話讓你豁然開朗，吹走籠罩在知識前方的薄霧，讓我們總算不是只窺視輪廓，能清楚地看見全貌。

※《數學大觀念》

有一種符合本書主題的二分法：討厭數學的人跟喜歡數學的人。前者埋怨「數學跟現實脫節。」後者部分同意這話，他們會說「數學是獨立於現實世界的另一個世界。」

請帶點魔幻的色彩來想像以下的畫面：你拿起筆在紙上算數學，簡單的 $1+1$ 或微分方程都可以。然後奇妙的事發生了，你的手穿過紙張，整個人往紙裡墜，你進入了數學的另一個世界。不需要畫五芒星的魔法陣，不需要任何繁瑣的祭祀儀式，只要一張紙、一支筆跟任何一道數學式子，你就能自由進出數學的世界。

作者亞瑟·班傑民教授是數學世界的最佳導遊，他帶領著讀者探索數學世界的趣味，就算是原來你很熟悉的各種數學知識，經過他的講解，鋪陳，你也頓時會覺



得很有趣。比方說， $2.72^{(\sqrt{(-1) \times 3.14})+1}$ 這組奇怪的數字，竟然會趨近於1(事實上，它就是號稱最美麗算式，歐拉公式) $e^{i\pi}+1=0$ 而班傑民教授同時是一位數學魔術師，它透過變魔術來呈現數學的趣味與創意。比方說，只要告訴他一個日期(年月日)，他就能立刻回答你是星期幾。當然，魔術的背後不是魔術，而是數學，或是更廣泛的說，規律。

能洞察規律的人，便能得到他人無法得到的資訊，以更快的方式得到資訊，或是成為一位數學魔術師。這才是數學的真正意義。

※《成長型數學思維》

很多人認為有所謂的「數學天分」、「數學腦」，如果學不好數學，很可能只是因為沒有數學腦，畢竟有人上課聽完就懂，有人在補習班複習，回家熬夜寫習題，卻還是考不好，當努力與成果無關，難免會歸因到天分不足。

但真相並非如此。雖然有一些孩子情況特別，有特殊的教育需求，會增加數學學習的難度，但對於絕大多數的小孩，數學不好的人可能不是因為沒有數學腦，而是因為抱著「我沒有數學腦」這樣的念頭，畫地自限，扼殺了自己的數學學習。

我們在鼓勵小孩時常用「失敗為成功之母」，愛迪生挑選燈絲材料失敗了無數次，更是某個年代的人都聽過的勵志故事。但在數學學習上，我們卻沒有那麼讚頌失敗。我們通常假設講解完、例題習題做完就該掌握這個知識，頂多再給幾次小考的機會，段考、大型考試是不允許犯錯的。擁抱錯誤，破除數學天分論，是本書最主要的概念。

本書對美國數學教育提出許多質疑，其中某些點放到臺灣也適用。比方說，數學本質上是推理的學問，教導我們如何延伸本能上我們就會的辨認規律、找出更有效率的做事方法。但在大量考

試下，學生們會誤以為數學要做得快，才算學得好。也因為要做得快，原本數學的多樣化，被限制成一些單調、高度壓縮後的公式，數學變成講究熟練度、需要大量反覆練習的科目。作者認為，練習有它的意義，但反覆練習重複的觀念只會耗盡學生的興趣，讓他們更遠離數學。正確的強化觀念做法應該是多元化、不同角度、合乎定義、不合乎定義的多方練習。我很喜歡書中的一個比喻：對認識鳥類有所幫助的，應該是思考蝙蝠為什麼不是鳥類，而不是繼續看更多麻雀和烏鴉的例子。

※《小學算術教什麼，怎麼教》

「小學數學雖然不深奧，但包含智慧；雖然不複雜，卻有深意。」

「我學習到的很大一部分並非新的事實，而是全然不同的東西，也就是那些細微的層次。這有點像欣賞一片布料，遠觀好似乎順均勻，但是拿到眼前就會察覺是由精細交織的線所構成：我原先當成是一體的概念，卻是由精細的觀念編織出來的。」

這兩段摘錄的文句，是作者阿哈羅尼教授親身到小學教學後的心得。他認為小學數學雖然以難度

來說不深，但相對的，小學生的數學基礎很淺，而小學數學又是影響到他們之後學習進階數學的重要基石，倘若有一兩個觀念不清楚，或許在當下不會有影響，但就像在會搖晃的磚瓦上堆疊，就算之後的每一步再仔細，完成的房子依然會搖晃。

小學數學可以說是數學學習的關鍵。這本書的前半段大方向的介紹了許多觀念性的知識，例如要培養的不止是程序性的知識，還要讓學生感受到數學的巧妙與用處，讓他們願意學習、運用數學。也介紹了好幾種實用的教學技巧，例如：

- 用具體的例子傳達抽象概念
- 一節課應該經歷三階段：從具體出發，畫圖，最後走向抽象
- 不跳過精確的命名，清晰定義概念
- 概念必須通過學童親身經驗才能產生

後半部則針對幾個重要的數學單元，進行更深入的探討。我想，這本書會是每一位小學老師，或家裡有小學生的家長都值得讀一讀的好書。

其實這幾年市面上的優質數學書、數學電影遠不止於此，相信

只要有興趣，看完這幾本，建立起一些「數感」後，一定能再找到更多的相關資源。比較可惜的是，其實受限於臺灣閱讀市場逐漸萎縮，以及大多數人依然對數學印象不佳，國外還有非常多有趣的數學書籍，是沒有翻譯引進的。比方說經典數學小說《平面國》，數學科普大師艾恩·史都華教授曾寫了續集，以及一本針對平面國的精彩導讀，平面國還被改拍成兩部電影，這些有趣的數學資源都沒有被引入臺灣。

此外，我們也很期待臺灣能有更多的數學老師、教授、相關工作者能投入數學傳播，讓我們能擁有不止是引進的資源，甚至還能產出我們自己的數學書、拍攝我們自己的數學電影。數學很抽象，也正因為它抽象，才能與各領域結合，應用在不同的地方。倘若我們有能力自己製作，發想撰寫，必然會自然而然的揉合臺灣特色與文化，形成更加有親和力，能引起更多人共鳴的數學作品。

獨樂樂不如眾樂樂，數學的好與趣味，值得分享給更多人。

希望這是我們每一位數學愛好者在將來，都能一起努力的目標。